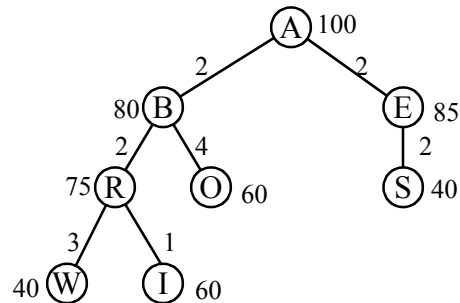


#### Zadatak 4: Samoglasnici i suglasnici

Posmatrajmo potpuni graf pretrage prikazan na slici 11. Vrednosti heurističke funkcije prikazane su pored svakog čvora, dok su cene operatora promene stanja prikazane pored grana grafa pretrage.



Slika 11

- Koje je stanje ekspanđovano četvrto u pretraživanju metodom po dubini uz primenu heuristike da stanja čija su imena samoglasnici imaju prednost u odnosu na ostala?
- Koje je stanje ekspanđovano četvrto primenom metode pretraživanja 'prvo najbolji'?

#### Rešenje

a) Pri ovom pretraživanju ne koristi se (numerički definisana) heuristička funkcija niti cene operatora promene stanja. Heuristika koja daje prednost samoglasnicima nam daje lokalno najbolji čvor među sledbenicima tekućeg čvora u pretrazi (to jest poslednjeg čvora koji je razvijen do tog trenutka). Ovakvoj vrsti heuristike prirodno odgovara pretraživanje po dubini. S obzirom da se vrši eksplicitan izbor među sledbenicima tekućeg čvora pretrage, radi se u stvari o pretraživanju metodom planinarenja.

Pretraga počinje od čvora A koji je inicijalno jedini čvor u stablu pretrage. Razvijanjem čvora A dobijaju se njegovi sledbenici, čvorovi B i E koji se dodaju, zajedno sa operatorima koji vode do njih u stablo pretrage. Heuristika daje prednost čvoru E, tako da se on razvija sledeći i pri tome u stablo pretrage dodaje čvor S. Čvor S se razvija sledeći pošto je jedini naslednik čvora E. Pošto čvor S nema naslednika, pretraga je zapala u 'čorsokak', pa s obzirom da čvor E nema drugih naslednika osim S, pretraga se nastavlja od čvora B kao drugog naslednika korenog čvora A. Prema tome, četvrti ekspanđovani čvor, to jest četvrto stanje čiji su sledbenici dobijeni pri pretrazi, je čvor B.

b) Pri ovoj pretrazi koristi se numerički definisana heuristička funkcija ali ne i cene operatora promene stanja. Za razliku od planinarenja, gde se izbor sledećeg čvora za razvijanje vrši lokalno među naslednicima poslednjeg ekspanđovanog čvora, u slučaju pretrage 'prvo najbolji' izbor se vrši globalno među svim čvorovima koji su uneti u stablo pretrage ali nisu razvijeni.

Pretraga polazi od čvora A, njegovim razvijanjem u stablo pretrage se unose čvorovi B i E. Između čvorova B i E za ekspanziju se bira B jer ima manju vrednost heurističke funkcije (80 naspram 85). Razvijanjem čvora B, u stablo pretrage unose se čvorovi R i O. Izbor se u ovom trenutku vrši između čvorova R, O i E kao jedinih neekspanđovanih

čvorova koji se nalaze u stablu pretrage u tekućem trenutku. Izbor pada na O jer ima najmanju vrednost heurističke funkcije. Razvijanjem čvora O ne unose se novi čvorovi u stablo pretrage, pa kandidati za razvijanje ostaju samo čvorovi R i E. Heuristička funkcija diktira izbor čvora R kao četvrtog za razvijanje pri ovoj pretrazi.

### Zadatak 5: Tri operatora

Poznato je da za neki problem pretraživanja postoje tri operatora,  $op1$ ,  $op2$  i  $op3$ , i da se u polaznom stanju može primeniti bilo koji od njih. Ako prvi primenjeni operator nije bio  $op3$ , tada se u sledećem koraku može primeniti operator različit od prvog. Svaka dalja primena nekog od operatora nije dozvoljena. Kako cilj nije dat, pretraživanje mora da obuhvati sva moguća stanja.

a) Prikazati graf pretraživanja i označiti čvorove prema redosledu obilaženja, pretpostavljajući da  $op1$  ima prednost nad  $op2$ , a ovaj takođe ima prednost nad  $op3$ . Koristiti strategiju pretraživanja po dubini.

b) Ako se dati graf pretražuje metodom 'prvo najbolji' (*best-first*), navesti redosled obilaženja čvorova. Date su heurističke funkcije za svaki čvor, kao i sekvenca primene operatora koja vodi do čvora:

6 -  $op1$ ,  $op2$

4 -  $op1$ ,  $op3$

9 -  $op2$ ,  $op1$

11 -  $op2$ ,  $op3$

8 -  $op1$

7 -  $op2$

5 -  $op3$

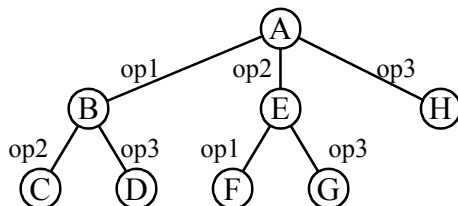
10 - polazno stanje

c) Ako bi se pretraživanje sprovedo metodom  $A^*$ , polazeći od heurističkih funkcija datih pod b), navesti redosled pretraživanja ako su cene primene operatora : 2 za  $op1$ , 5 za  $op2$ , i 9 za  $op3$ .

### Rešenje

a) Stanja će biti obeležavana simbolički. Neka je A oznaka za startno stanje. Stanje A predstavlja koren stabla pretrage prikazanog na slici 12. Na stanje A mogu se primeniti sva tri operatora. S obzirom da operator  $op1$  ima prioritet, njegovom primenom prelazi se u novo stanje B i pri tom se unosi odgovarajući čvor u stablo pretrage kao sin čvora A. S obzirom da se radi o pretraživanju po dubini, razmatra se čvor B. Mogući operatori su, prema uslovu zadatka  $op2$  ili  $op3$ . Operator  $op2$  ima prioritet i njegovom primenom prelazi se iz stanja B u stanje C i unosi odgovarajući čvor u stablo pretrage kao sin čvora B. Na čvor C nije više moguće primeniti nijedan operator prema uslovu zadatka, pa se pretraga vraća u čvor B. Na ovo stanje moguće je primeniti (od do sada neprimenjenih operatora)  $op3$ , te se tako dobija novo stanje D i novi čvor u stablu pretrage.

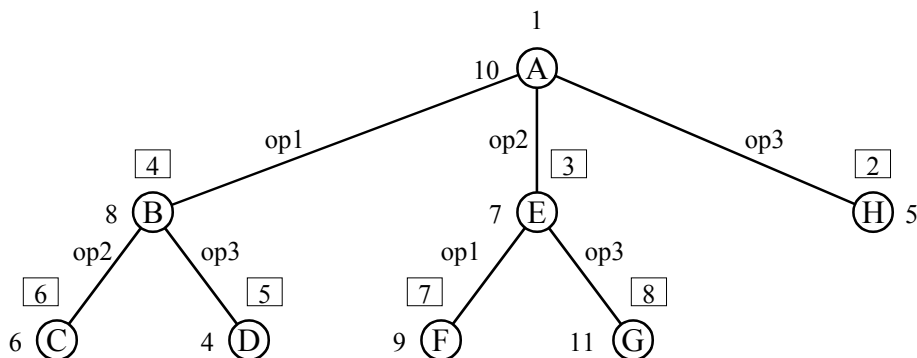
Razmatranjem stanja D ustanovljava se da se na njega ne mogu primeniti operatori, pa se kontrola vraća prvo na stanje B, pa zatim, s obzirom da smo ekspandovali sve sinove čvora B, na stanje A. Nadalje se na stanje A primenjuje operator op2 kao najprioritetniji operator koji još nije primenjen čime se dobija stanje E i odgovarajući sin čvora A u stablu pretrage. Procedura se nastavlja sve dok se kompletno stablo ne konstruiše i konstatuje da generisanje novih stanja nije moguće. Redosled obilaženja čvorova u ovom slučaju je, prema tome: A, B, C, D, E, F, G, H.



Slika 12

b) Pri pretraživanju metodom 'prvo najbolji' u stablu pretrage bira se najbolji od svih čvorova stabla pretrage koji su otkriveni, a još nisu obiđeni do određenog trenutka. Kriterijum za selekciju najboljeg čvora je vrednost *heurističke funkcije* koja predstavlja meru udaljenosti određenog stanja problema od konačnog rešenja. Što je vrednost heurističke funkcije za određeno stanje manja, to je stanje bliže ciljnom stanju.

Za zadati problem, stablo pretrage sa ucrtanim redosledom obilaženja čvorova prikazano je na slici 13. Pored svakog čvora stabla pretrage navedena je vrednost heurističke funkcije definisana postavkom zadatka. Pri pretraživanju se, kao i uvek polazi od korena stabla pretrage. Ekspandovanjem korena dobijaju se čvorovi B, E i H. Prvi se obilazi čvor H jer ima najmanju vrednost heurističke funkcije. Pošto čvor H nema naslednika, izbor se svodi na preostala dva otkrivena a neobiđena čvora B i E. Bira se čvor E i vrši njegova ekspanzija čime se u stablo dodaju čvorovi F i G. Sada se vrši izbor između čvorova B, F, i G. Bira se čvor B kao najbolji i vrši njegova ekspanzija. Za izbor sada ostaju čvorovi C, D, F i G. S obzirom da ovi čvorovi nemaju potomaka nema dodavanja novih čvorova. Postojeći čvorovi biće obiđeni u rastućem redosledu njihovih heurističkih funkcija. Kompletan redosled obilaska čvorova stabla pretrage je: A, H, E, B, D, C, F, G.



Slika 13

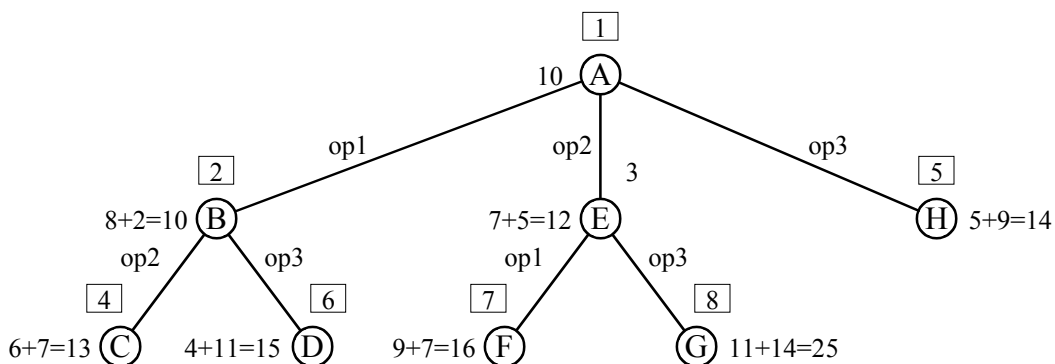
c) Metod A\* spada u metode koji pronalaze optimalno rešenje, to jest rešenje sa najmanjom *kumulativnom cenom*. Kumulativna cena za određenu putanju u stablu pretrage jednaka je zbiru cena primene pojedinih operatora na datoj putanji. U opštem

slučaju različiti operatori mogu imati različite cene primene, kao što je to slučaj i u ovom zadatku. U ovom zadatku ne traži se nalaženje optimalnog rešenja, već je cilj obići sva stanja. I pored toga, cene putanja utiču na redosled obilaženja čvorova.

Metod A\* kao funkciju procene  $f$  parcijalne putanje od startnog stanja do nekog drugog stanja S koristi zbir heurističke funkcije  $h$  za stanje S i funkciju kumulativne cene  $c$  putanje od početnog stanja do stanja S:

$$f = h + c$$

Vrednosti funkcije  $h$  i cene primene operatora zadate su postavkom za svaki čvor u stablu pretrage. U okviru algoritma iz dodatka 1, tokom pretrage evidentiraju se, ne čvorovi stabla pretrage, već parcijalne putanje od korena stabla do otkrivenih čvorova stabla pretrage. U ovom slučaju pretraga počinje sa putanjom nulte dužine do korena stabla (stanja A). Ekspandovanjem korena A, dobijaju se tri nove parcijalne putanje, AB, AE i AH (slika 24). Funkcije procene za ove putanje navedene su pored odgovarajućih čvorova. Od otkrivenih putanja bira se ona sa najmanjom funkcijom procene, a to je u konkretnom slučaju putanja AB. Ekspandovanjem čvora B otkrivaju se dve nove parcijalne putanje ABC i ABD i računaju njihove funkcije procene. U sledećem koraku vrši se izbor najbolje između svih otkrivenih a neobidenih putanja, a to su u ovom trenutku ABC, ABD, AE i AH. Putanja AE bira se kao najbolja i u sledećem koraku vrši ekspanzija čvora E čime se dobijaju dve nove putanje AEF i AEG. Sada se izbor vrši između putanja ABC, ABD, AEF, AEG i AH i tako dalje, sve dok se ne obiđe kompletno stablo pretrage.



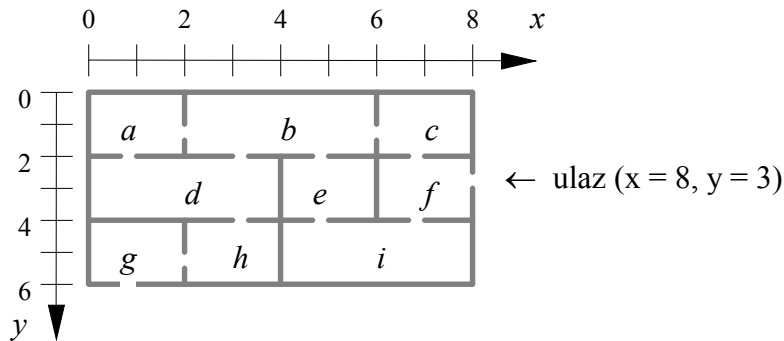
Slika 24

### Zadatak 6: Džems Bond

Na slici 15 prikazan je tlocrt jedne kuće, u kojoj se, u prostoriji  $g$ , nalazi garaža u kojoj je auto Aston Martin (koordinate:  $x=1, y=5$ ). U kuću utrčava Džems Bond, 8 sekundi ispred grupe loših momaka koji ga jure, a svi se kreću brzinom od  $1 \text{ m/s}$ . Dž.B. poseduje senzor koji mu javlja udaljenost od auta a loši momci pretražuju kuću deleći se u manje grupe po potrebi, tako da svaku prostoriju zaposedaju za najkraće moguće vreme.

a) Koji metod pretrage koristi Dž.B., a koji loši momci?

b) Pokazati kako će se kretati Dž.B., a kako njegovi gonioni, i odrediti hoće li Dž.B. uspeti da stigne do auta pre loših momaka.



Slika 15

### Rešenje

a) Tlocrt kuće predstavlja graf pretrage, a Dž.B. i loši momci svojim prolaskom kroz kuću otkrivaju dva različita stabla pretrage. Džems Bond, kao pojedinac, može pri pretrazi da vrši izbor samo lokalno najboljeg naslednika tekućeg čvora stabla pretrage u čemu mu pomaže senzor za određivanje rastojanja do automobila. Prema tomo, Dž. B. primenjuje metod *planinarenja*.

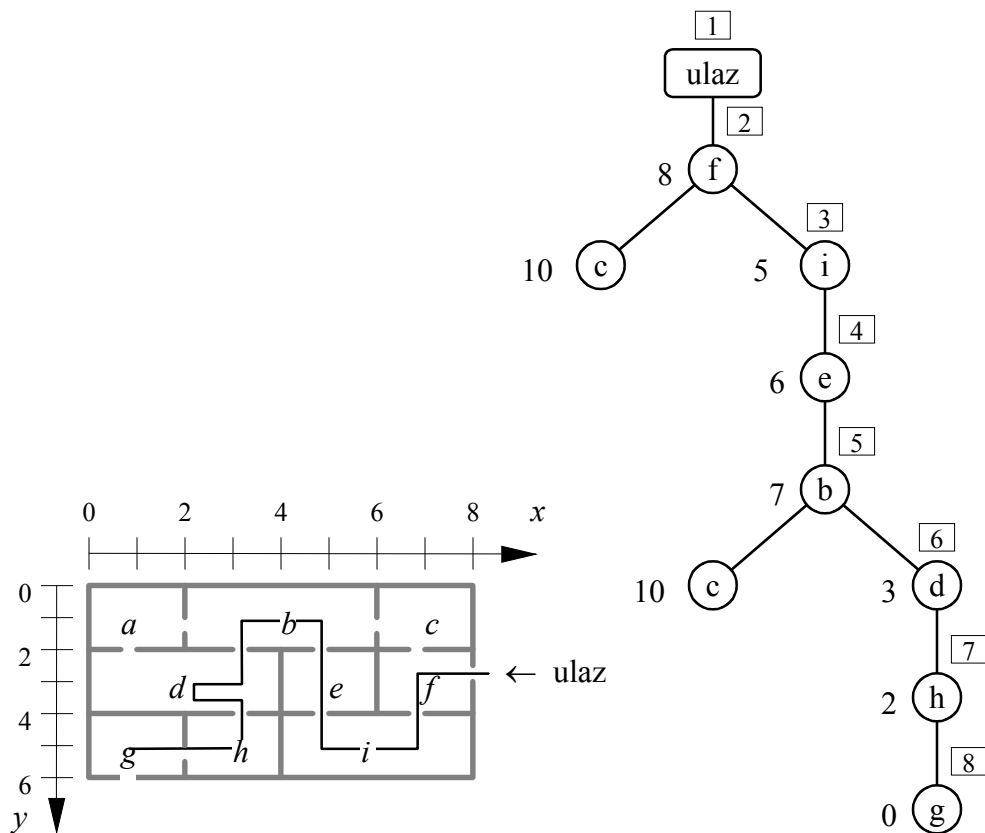
Loši momci ne poseduju senzor za određivanje udaljenosti od kola, što odgovara pretrazi bez korišćenja heurističke funkcije. S obzirom da nevaljalci zaposedaju svaku od prostorija za najkraće vreme, radi se o pretrazi koja pronalazi optimalne putanje do svih soba, to jest, svih čvorova u grafu pretrage. Ove uslove zadovoljava pretraga metodom *grananja i ograničavanja*. Uz dodatnu pretpostavku da neko od loših momaka uvek ostaje u svakoj od soba koje zaposednu, loši momci ne moraju ponovo da zaposedaju sobe do kojih su ranije došli po alternativnoj putanji. U pretrazi se, pod ovom pretpostavkom, može primeniti princip *dinamičkog programiranja*, da se iz daljeg razmatranja isključe sve putanje koje vode do određene sobe osim najkraće.

b) Dž.B. će uspešno umaći ako dođe do automobila a da se pri prolasku kroz kuću ne sretne ni u jednoj od soba kroz koje prolazi sa goniocima. Za rešenje problema potrebno je, stoga, odrediti redosled soba kroz koje Džems Bond prolazi i odgovarajuće vremenske trenutke kada se nalazi u svakoj od njih i uporediti ih sa vremenskim trenucima kada sobe bivaju 'okupirane' od strane gonilaca.

Sledeće pretpostavke uprošćavaju računanje pređenih puteva i vremena potrebnih za njihovo prelaženje:

- Kretanje Džems Bonda i njegovih gonilaca je isključivo u pravcu x ili y ose (nema dijagonalnog kretanja).
- Pri prelaženju iz sobe u sobu uvek se ide iz centra jedne sobe u centar druge.

Stablo pretrage za pretraživanje metodom planinarenja prikazano je na slici 16.



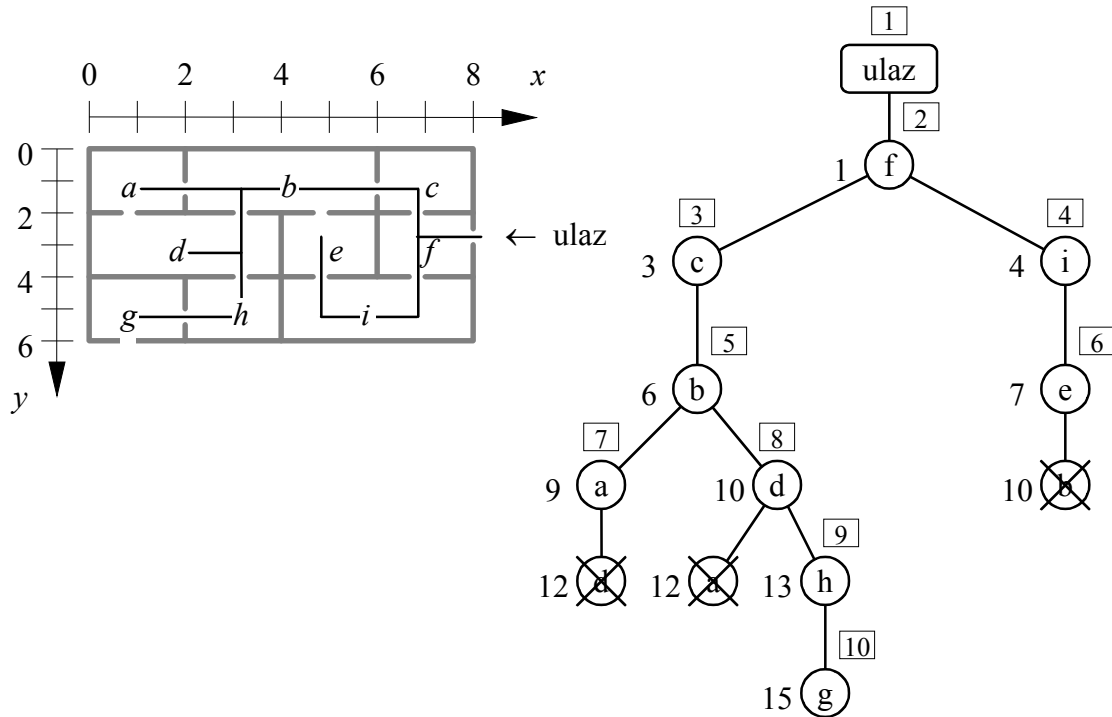
Slika 16

Scenario kretanja Džemsa Bonda, prema tome, je putanjom prikazanom na mapi na istoj slici. Uzimajući u obzir brzinu kretanja, kao i navedene pretpostavke, zaključuje se sledeće:

- - u sobi *f* Dž. B. se nalazi od 0. do 2. sekunde,
- u sobi *i* Dž. B. se nalazi od 2. do 6. sekunde,
- u sobi *e* Dž. B. se nalazi od 6 do 8. sekunde,
- u sobi *b* Dž. B. se nalazi od 8 do 12. sekunde,
- u sobi *d* Dž. B. se nalazi od 12. do 16. sekunde (s obzirom na pretpostavku da se uvek dođe do centra sobe, dakle ne ide se pravolinijski od vrata do vrata),
- u sobi *h* Dž. B. se nalazi od 16. do 18. sekunde
- u sobi *g* Dž. B. se nalazi od 18. do 19. sekunde, kada ulazi u kola i velikom brzinom izvozi ih iz kuće.

Gornja analiza važi naravno pod pretpostavkom da gonjoci nisu presreli agenta 007 u kući. Kretanje loših momaka prikazano je stablom pretrage prikazanom na slici **Error! Bookmark not defined.** Uz pojedine čvorove (levo od njih) naznačene su dužine putanja od ulaza do centara odgovarajućih prostorija, a uokvireni brojevi predstavljaju redosled obilaska čvorova. Precrtani čvorovi odgovaraju putanjama koje su eliminisane primenjujući princip dinamičkog programiranja, tako da se svi neprecrtani čvorovi nalaze na najkraćim putanjama od ulaza.

Na tlocrtu kuće na slici 17 prikazano je kretanje loših momaka po putanjama iz stabla pretrage. Dužina putanje do ulaza određene prostorije odgovara vremenu zaposedanja prostorije u sekundama od trenutka ulaska loših momaka u kuću (s obzirom da je brzina kretanja 1 m/s). Za prostorije  $a, b, c, d, e, f, g, h, i$  to su redom 8., 4., 2., 8., 6., 0., 14., 12. i 2. sekunda od trenutka ulaska, odnosno 16., 12., 10., 16., 14., 8., 22., 20. i 10. sekunda od trenutka ulaska Džemsa Bonda u kuću. Prema tome, Džems Bond uspešno izmiče lošim momcima koji su mu 'za petama' u prostorijama  $b$  i  $d$ .



Slika 17