Modeli predstavljanja znanja

Formalna logika

Zadatak 1: Predikati START, END i DUR

Dati su predikati

START(*e*,*t*) - istinit ako je događaj *e* započeo u trenutku *t*,

END(*e*,*t*) - istinit ako se neki događaj *e* završio u trenutku *t*, i

DUR(*e*,*d*) - istinit ako je događaj *e* trajao *d* vremenskih jedinica.

a) Napisati dobro formirane formule (WFF) koje bi omogućile zaključivanje o kraju nekog događaja, bez obzira na to da li je poznata vrednost *t* u predikatu END, ili o početku nekog događaja bez obzira na to da li je poznata vrednost *t* u predikatu START.

b) Definisati novi predikat AFTER(*e2*,*e1*) koji je istinit ako se događaj *e2* desio posle događaja *e1*, koristeći formule iz prethodne tačke.

c) Definisati novi predikat TOK(*e1*,*e2*) koji je istinit ako se dogadjaj *e1* završio u trenutku kada se *e2* dešava.

Rešenje

a) Za zaključivanje o početku događaja koristimo dobro formiranu formulu:

1. $\forall e\ \forall t\ \forall d\ \{\ [\ \text{END}(e,t) \wedge \text{DUR}(e,d)\ ] \Rightarrow \text{START}(e,t\text{-}d)\ \}$

Ako se događaj e završio u trenutku t, a znamo da je trajao d vremenskih jedinica, to znači da je ovaj događaj morao da počne u trenutku t-d. Analogno možemo zaključiti o kraju događaja znajući njegovo trajanje i vremenski trenutak početka:

2. $\forall e\ \forall t\ \forall d\ \{\ [\ \text{START}(e,t) \wedge \text{DUR}(e,d)\ ] \Rightarrow \text{END}(e,t+d)\ \}$

b) Potrebno je da bude ispunjen uslov da je vremenski trenutak t_2 početka događaja e_2 sledi vremenski trenutak t_1 kraja događaja e_1 (nema preklapanja dešavanja događaja):

$$\forall e_1\ \forall e_2\ \forall t_1\ \forall t_2\ [\ \text{START}(e_2,t_2) \wedge \text{END}(e_1,t_1) \wedge \text{VEĆE}(t_2, t_1) \Rightarrow \text{AFTER}(e_2, e_1)\ ]$$

Predikat VEĆE(t_2, t_1) je tačan ako je veće t_2 od t_1.

c) Vremenski trenutak t_1 kada se završava događaj e_1 treba da se nalazi između vremena početka t_2 i kraja t_3 događaja e_2:

$$\forall e_1\ \forall e_2\ \forall t_1\ \forall t_2\ \forall t_3\quad [\ \text{END}(e_1,t_1) \wedge \text{START}(e_2,t_2) \wedge \text{END}(e_2,t_3) \wedge \text{IZMEĐU}(t_1\ ,\ t_2\ ,\ t_3) \Rightarrow \text{TOK}(e_1, e_2)\ ]$$

Zadatak 2: Ostrvo uživanja

Čokoladgrad, glavni grad Ostrva uživanja, nalazi se na raskrsnici četiri puta koja postoje na ostrvu. Svaki od puteva vodi na jednu od četiri strane sveta, i ide do jednog od četiri sela koja takođe postoje na ostrvu (slika 1). Poznato je:

1. Selo na Okeanskom putu je za 1 milju dalje od Čokoladgrada nego što je to slučaj sa Sladoled-selom.
2. Najbliže selo udaljeno je 2 milje od Čokoladgrada.
3. Ne postoji par sela koja su podjednako udaljena od Čokoladgrada.
4. Selo Urmašica udaljeno je 6 milja od sela koje se nalazi na kraju Obalskog puta.
5. Selo na Putu Slasti udaljeno je 9 milja od sela Jesenloze.
6. Selo na jugu dvaput je dalje od Čokoladgrada no što je to slučaj sa selom na severu..

Predstaviti ove činjenice u obliku stavova predikatske logike.

```
          selo                    sever
           ||                       ↑
selo====Č.grad=====selo
           ||
          selo
```

Slika 1

Rešenje

Za predstavljanje zadatih činjenica uvešćemo sledeće predikate:

- NA(p,s) je ispunjeno ako je selo s na putu p.
- U_SMERU(d,s) je ispunjeno ako je selo s na strani sveta d.
- JEDNAKO(x,y) označava relacioni operator jednakosti x i y, gde x i y mogu biti ili oznake sela ili razdaljine. Isti operator upotrebićemo, dakle, u različitim kontekstima što se naziva preopterećenje (*overloading*) operatora.
- MANJE(x,y) je ispunjeno ako je razdaljina x manja od razdaljine y.

Funkcija DALJINA(x,y) daje kao rezultat udaljenost mesta x od mesta y.

Činjenice se sada mogu predstaviti na sledeći način:

1. $\forall$x [NA(Okeanski_put,x) $\Rightarrow$

    JEDNAKO(DALJINA(x,Čokoladgrad), DALJINA(Sladoled_Selo, Čokoladgrad)+1)]

2. $\neg\exists$x [MANJE(DALJINA(x, Čokoladgrad), 2)]

3. $\forall$x $\forall$y [JEDNAKO(DALJINA(x, Čokoladgrad), DALJINA(y, Čokoladgrad)) $\Rightarrow$

    JEDNAKO(x,y)]

4. $\forall$x [NA(Obalski_put,x) $\Rightarrow$ JEDNAKO(DALJINA(x, Urmašica), 6)]

5. $\forall$x [NA(Put_slasti,x) $\Rightarrow$ JEDNAKO(DALJINA(x, Jesenloza), 9)]

6. $\forall x \forall y$ [U_SMERU(Jug, x) $\wedge$ U_SMERU(Sever,y) $\Rightarrow$

JEDNAKO(DALJINA(x, Čokoladgrad), 2*DALJINA(y, Čokoladgrad))]

Zadatak 3: Svet blokova (interpretacija predikatskih formula)

Svet blokova predstavlja jednu od interpetacija sledećih dobro formiranih formula:

ON(C,A)

ONTABLE(A)

ONTABLE(B)

CLEAR(C)

CLEAR(B)

$(\forall x)[\text{CLEAR}(x) \Rightarrow \neg(\exists y)\ \text{ON}(y,x)\ ]$

Naći dve drugačije interpretacije (van sveta blokova) koje zadovoljavaju konjunkciju ovih formula.

Analiza problema

Predikatske formule interpretiramo tako što dodelimo određenja značenja (semantiku) pojedinim predikatima, funkcijama, konstantama i promenljivama. Imena predikata, funkcija, konstanti i operatora obično se biraju tako da asociraju na njihovo značenje, ali nas to ne sprečava da formulu koja ima određeno značenje interpretiramo na neki drugi način tako što ćemo definisati nova značenja za pojedine predikate. Istoj formuli možemo odrediti proizvoljan broj različitih interpretacija.

Rešenje

Zadatim formulama možemo dati interpretaciju odnosa među zaposlenima u preduzeću:

- A, B i C su osobe koje rade u istom preduzeću.
- Predikat ON(C,A) označava da je osoba C nadređena osobi A.
- Predikati ONTABLE(A) i ONTABLE(B) označavaju da su osobe A i B izvršioci poslova (nemaju podređenih).
- Predikati CLEAR(C) i CLEAR(B) označavaju da su osobe B i C (su)vlasnici preduzeća.
- Formula $(\forall x)[\text{CLEAR}(x) \Rightarrow \neg(\exists y)\ \text{ON}(y,x)]$ u ovom slučaju znači da vlasnik preduzeća nema iznad sebe nadređenu osobu.

Navešćemo drugačiju interpretaciju koja se odnosi na matematički pojam skupa:

- A, B i C predstavljaju različite skupove.
- Predikat ON(C,A) označava da je skup C podskup skupa A.
- Predikati ONTABLE(A) i ONTABLE(B) označavaju da su skupovi A i B podskupovi skupa TABLE. Skup TABLE je univerzalan skup, to jest, sadrži sve ostale skupove.
- Predikat CLEAR(C) i CLEAR(B) označavaju da su B i C prazni skupovi.

- Formula $(\forall x)[CLEAR(x) \Rightarrow \neg(\exists y)\ ON(y,x)]$ izražava svojstvo praznog skupa da ne postoji skup koji je podskup praznog skupa.

Čitalac za vežbu može pronaći druge interpretacije zadatih formula.

Zadatak 4: Jovanovi preci

Pretpostavimo da smo činjenicu da je Jovan Petrov otac predstavili sa OTAC(Petar, Jovan), činjenicu da je Milica Petrova majka predikatom MAJKA(Petar, Milica) i činjenicu da je Milan jedan od Petrovih predaka predikatom PREDAK(Petar, Milan).

Napisati dobro formiranu formulu koja treba da predstavi činjenicu:

Svaki Petrov predak je ili njegov otac, ili njegova majka ili jedan od njihovih predaka.

Rešenje

Zadati iskaz može se predstaviti sledećom predikatskom formulom:

$\forall x\ \{PREDAK(Petar,x) \Rightarrow [OTAC(Petar,x) \vee MAJKA(Petar,x) \vee [\exists y(OTAC(Petar,y) \vee MAJKA(Petar,y)\ ) \wedge PREDAK(y,x)]]\}$

Diskusija

Iskaz $P \Rightarrow Q$ se tumači na sledeći način: Svako P je Q. Drugim rečima, ako je P tačno možemo odmah da utvrdimo da je Q tačno, ali ako P nije tačno ne možemo ništa reći o istinitosnoj vrednosti Q (jer, na primer, može biti nekih drugih pretpostavki koje povlače tačnost Q). Ako je Q tačno, ne možemo ništa reći o istinitosnoj vrednosti P (jer, kao što je malopre rečeno, i neke druge pretpostavke osim P mogu da povlače zaključak Q), dok u slučaju netačnosti Q možemo odmah da utvrdimo netačnost P (poznato je da je $P \Rightarrow Q$ ekvivalentno sa $\neg Q \Rightarrow \neg P$). Prema tome, P je *dovoljan* uslov za Q, a Q je *neophodan* uslov za P.

Označimo sa P činjenicu da je neko (ljudsko biće) x Petrov predak, a sa Q činjenicu da je x ili Petrov otac, ili Petrova majka, ili jedan od njihovih predaka. Zadati iskaz striktno se predstavlja u formi $P \Rightarrow Q$ (što je u rešenju i učinjeno), mada se, poznajući značenja predikata može ustvrditi i $Q \Rightarrow P$. Prema tome, važi ekvivalencija $P \Leftrightarrow Q$ to jest, P je neophodan i dovoljan uslov za Q, a takodje, Q je nepohodan i dovoljan uslov za P.

Obratimo pažnju i na složeni uslov da je x ili Petrov otac, ili Petrova majka ili jedan od njihovih predaka. Formulacija ili ... ili odgovara logičkoj operaciji *ekskluzivno ili* u oznaci $\oplus$. Vrednost izraza $P \oplus Q$ je tačna ako je tačno jedan od iskaza P i Q tačan (za razliku od običnog ILI koje je tačno i u slučaju kada su i P i Q tačni). U rešenju bi, striktno rečeno, bila potrebna operacija ekskluzivno ILI, medjutim, uzimajući u obzir semantička ograničenja (da na primer ista osoba ne može biti i Petrov otac i Petrova majka), moguće je upotrebiti običnu ILI operaciju.

Zadatak 5: Nalaženje konjuktivne normalne forme

Odrediti konjuktivnu normalnu formu za sledeću formulu:

$\forall x\ \{\ Cigla(x) \Rightarrow \{\ \exists y\ [\ Na(x,y) \wedge \neg Piramida(y)\ ] \wedge \neg\exists y\ [\ Na(x,y) \wedge Na(y,x)\ ] \wedge$

$\wedge\ \forall y\ [\neg Cigla(y) \Rightarrow \neg Jednako(x,y)]\ \}\}$

Rešenje

Svaka dobro formirana formula može se dovesti u konjuktivnu normalnu formu (KNF), to jest, biti predstavljena nizom *klauzula* pri čemu se između pojedinih klauzula podrazumeva operator konjukcije. Klauzula je niz literala povezanih disjunkcijom. Postupak transformacije formule u KNF sastoji se iz niza koraka:

1. Eliminisanje implikacija ($E_1 \Rightarrow E_2$ transformiše se u $\neg E_1 \vee E_2$)

Sledi

$$\forall x\ [\ \neg Cigla(x) \vee (\exists y\ [\ Na(x,y) \wedge \neg Piramida(y)\ ] \wedge \neg\exists y\ [\ Na(x,y) \wedge Na(y,x)\ ] \wedge$$
$$\wedge\ \forall y\ [\neg(\neg Cigla(y)) \vee \neg Jednako(x,y)])]$$

2. 'Spuštanje' negacija do atomskih formula

($\neg(E_1 \wedge E_2)$ transformiše se u $\neg E_1 \vee \neg E_2$,

$\neg(E_1 \vee E_2)$ transformiše se u $\neg E_1 \wedge \neg E_2$,

$\neg(\neg E_1)$ transformiše se u E_1 ,

$\neg\forall x\ [\ E_1(x)\ ]$ transformiše se u $\exists x\ [\ \neg E_1(x)\ ]$,

$\neg\exists x\ [\ E_1(x)\ ]$ transformiše se u $\forall x\ [\ \neg E_1(x)\ ]$)

Sledi

$$\forall x\ [\ \neg Cigla(x) \vee (\exists y\ [\ Na(x,y) \wedge \neg Piramida(y)\ ] \wedge \forall y\ [\ \neg Na(x,y) \vee \neg Na(y,x)\ ] \wedge$$
$$\wedge\ \forall y\ [Cigla(y) \vee \neg Jednako(x,y)\ ]\ )]$$

3. Uklanjanje egzistencijalnih kvantifikatora

Posmatrajmo izraz

$$\forall x\ \exists y\ [\ Na(x,y) \wedge \neg Piramida(y)\ ].$$

Za svaku vrednost x uvek se može naći neka vrednost y takva da formula važi. Drugim rečima, postoji funkcija Φ koja (nije bitno na koji način) za svaku vrednost x daje odgovarajuću vrednost y. Sada posmatranu formulu možemo da zamenimo sledećom:

$$Na(x,\Phi(x)) \wedge \neg Piramida(\Phi(x))$$

Egzistencijalni kvantifikator više se ne javlja u formuli. Fukcije uvedene radi zamene egzistencijalnih kvantifikatora zovu se Skolemove funkcije, po skandinavskom matematičaru koji ih je prvi uveo. U gornjem primeru, funkcija Φ po prirodi stvari zavisi od x. Generalno, argumenti funkcije su sve promenljive koje su vezane univerzalnim kvantifikatorom na onom mestu u formuli na kome se pojavljuje član $\exists y$.

Ako Skolemovu funkciju u problemu koji razmatramo nazovemo Drži, imaćemo:

$$\forall x\ [\ \neg Cigla(x) \vee (\ \ Na(x,Drži(x)) \wedge \neg Piramida(Drži(x))\ \ \wedge \forall y\ [\ \neg Na(x,y) \vee \neg Na(y,x)\ ]$$
$$\wedge\ \forall y\ [Cigla(y) \vee \neg Jednako(x,y)\ ])]$$

4. Preimenovanje promenljivih tako da svakom kvantifikatoru odgovara posebna promenljiva (ovo je priprema za sledeći korak)

$$\forall x\ [\ \neg Cigla(x) \vee (\ \ Na(x,Drži(x)) \wedge \neg Piramida(Drži(x))\ \ \wedge \forall y\ [\ \neg Na(x,y) \vee \neg Na(y,x)\ ]$$

$\wedge \forall z$ [Cigla(z) $\vee$ $\neg$Jednako(x,z)])]

5. Premeštanje svih univerzalnih kvantifikatora na levu stranu bez promene njihovog redosleda

$\forall x\ \forall y\ \forall z$ [$\neg$Cigla(x) $\vee$ (Na(x,Drži(x)) $\wedge$ $\neg$Piramida(Drži(x)) $\wedge$

$\wedge$ [$\neg$Na(x,y) $\vee$ $\neg$Na(y,x)] $\wedge$ [Cigla(z) $\vee$ $\neg$Jednako(x,z)])]

6. 'Spuštanje" disjunkcija do najnižeg nivoa (prema zakonu distribucije $\vee$ u odnosu na $\wedge$

(E1 $\wedge$ E2) $\vee$ E3 transformiše se u (E1 $\vee$ E3) $\wedge$ (E2 $\vee$ E3))

Sledi

$\forall x\ \forall y\ \forall z$ [($\neg$Cigla(x) $\vee$ Na(x,Drži(x))) $\wedge$ ($\neg$Cigla(x) $\vee$ $\neg$Piramida(Drži(x))) $\wedge$

$\wedge$ ($\neg$Cigla(x) $\vee$ $\neg$Na(x,y) $\vee$ $\neg$Na(y,x)) $\wedge$

$\wedge$ ($\neg$Cigla(x) $\vee$ Cigla(z) $\vee$ $\neg$Jednako(x,z)))]

7. Eliminacija konjukcija (svaki član treba napisati kao zasebnu formulu)

$\forall x$ [$\neg$Cigla(x) $\vee$ Na(x,Drži(x))]

$\forall x$ [$\neg$Cigla(x) $\vee$ $\neg$Piramida(Drži(x))]

$\forall x\ \forall y$ [$\neg$Cigla(x) $\vee$ $\neg$Na(x,y) $\vee$ $\neg$Na(y,x)]

$\forall x\ \forall z$ [$\neg$Cigla(x) $\vee$ Cigla(z) $\vee$ $\neg$Jednako(x,z))]

8. Preimenovanje promenljivih tako da ne postoji ista promenljiva u različitim formulama

$\forall x$ [$\neg$Cigla(x) $\vee$ Na(x,Drži(x))]

$\forall u$ [$\neg$Cigla(u) $\vee$ $\neg$Piramida(Drži(u))]

$\forall v\ \forall y$ [$\neg$Cigla(v) $\vee$ $\neg$Na(v,y) $\vee$ $\neg$Na(y,v)]

$\forall w\ \forall z$ [$\neg$Cigla(w) $\vee$ Cigla(z) $\vee$ $\neg$Jednako(w,z))]

9. Uklanjanje kvantifikatora

$\neg$Cigla(x) $\vee$ Na(x,Drži(x))

$\neg$Cigla(u) $\vee$ $\neg$Piramida(Drži(u))

$\neg$Cigla(v) $\vee$ $\neg$Na(v,y) $\vee$ $\neg$Na(y,v)

$\neg$Cigla(w) $\vee$ Cigla(z) $\vee$ $\neg$Jednako(w,z))

Zaključno sa ovim korakom završen je postupak transformacije formule u KNF. Zavisno od složenosti formule, pojedini koraci mogu se preskočiti ili objediniti.