Zadatak 6: Perica i Chop Suey (zaključivanje rezolucijom)

Poznate su činjenice:

1. Perica voli sva laka jela.
2. Jela francuske kuhinje su teška.
3. Jela kineske kuhinje su laka.
4. Chop Suey je jelo kineske kuhinje.

Koristeći rezoluciju odgovoriti na pitanje: koje jelo voli Perica?

Rešenje

Prevodimo iskaze u stavove predikatske logike:

1. $\forall$x [Lako_jelo(x) $\Rightarrow$ Perica_voli(x)]
2. $\forall$y [Francusko_jelo(y) $\Rightarrow$ $\neg$Lako_jelo(y)]
3. $\forall$z [Kinesko_jelo(z) $\Rightarrow$ Lako_jelo(z)]
4. Kinesko_jelo(Chop_Suey)

Dokazaćemo da postoji jelo koje Perica voli, to jest

$\exists$x [Perica_voli(x)]

Zbog toga ćemo gornjim stavovima dodati negaciju tvrđenja:

5. $\neg\exists$x [Perica_voli(x)]

Prevedimo iskaze u konjuktivnu normalnu formu:

1. $\neg$Lako_jelo(x) $\vee$ Perica_voli(x)
2. $\neg$Francusko_jelo(y) $\vee$ $\neg$Lako_jelo(y)
3. $\neg$Kinesko_jelo(z) $\vee$ Lako_jelo(z)
4. Kinesko_jelo(Chop_Suey)
5. $\neg$Perica_voli(w)

Sada rezolucijom tražimo protivrečnost. Primenićemo **strategiju *skupa podrške* (engl. *set-of-support*)** pri izboru stavova za spajanje, koja se sastoji u tome da se za spajanje uvek prvi biraju oni stavovi koji predstavljaju ili negaciju tvrđenja ili stavove izvedene iz negacije tvrđenja. Razmatramo, prema tome, redom stavove 1 do 4 radi spajanja sa stavom 5; jedina moguća kombinacija je:

1., 5. $\xrightarrow{x = w}$ 6. $\neg$Lako_jelo(w)

Pošto su isprobane sve kombinacije stava 1 sa ostalim početnim stavovima, razmatramo kombinacije stava 6 sa ostalim stavovima. Jedina moguća kombinacija je:

3., 6. $\xrightarrow{z = w}$ 7. $\neg$Kinesko_jelo(w)

Najzad, razmatranjem kombinacija stava 7. sa ostalim stavovima, jedina moguća kombinacija

4., 7. $\xrightarrow{w = Chop\_Suey}$ NIL

Dokazano je dakle, da Perica voli Chop_Suey.

Diskusija

Pri prevođenju pretpostavki u predikatske formule treba obratiti pažnju da iskaz 1. znači da činjenica da je neko jelo lako povlači zaključak da Perica voli to jelo, a ne obrnuto. Drugim rečima, formula

$$\forall x\ [\ Perica\_voli(x) \Rightarrow\ Lako\_jelo(x)]$$

ne bi predstavljala korektan prevod stava 1. Poslednja formula može se prevesti iskazom: Perica voli SAMO laka jela (ali ne obavezno SVA laka jela).

Čitaocu se preporučuje da pokuša rešenje pronaći primenom neke od alternativnih strategija izbora stavova za rezoluciju.

Zadatak 7: Rodbinske veze

Date su sledeće tvrdnje:

1. Ako je osoba X brat osobe Z i osoba Y takođe brat osobe Z, onda je osoba X brat i osobe Y ili su X i Y ista osoba.
2. Ako je osoba X muško i ima istu majku kao i osoba Y, onda je X brat osobe Y ili su X i Y ista osoba.
3. Marija je majka Milana i Ane.
4. Milan je muško.
5. Jovan je Anin brat.
6. Milan i Jovan nisu ista osoba.
7. Milan i Ana nisu ista osoba.

a) Napisati formule predikatskog računa i prevesti ih u klauzalni oblik.

b) Rezolucijom dokazati ili pobiti tvrdnju da je Milan Jovanov brat.

Rešenje

a) Činjenice se mogu predstaviti predikatskim formulama na sledeći način:

1. $\forall x\ \forall y\ \forall z\ [\ Brat(x,z) \wedge Brat(y,z) \Rightarrow Brat(x,y) \vee Ista\_osoba(x,y)\ ]$

2. $\forall x\ \forall y\ \forall z\ [\ Muško(x) \wedge Majka(z,x) \wedge Majka(z,y) \Rightarrow Brat(x,y) \vee Ista\_osoba(x,y)\ ]$

3. Majka(Marija, Milan) $\wedge$ Majka(Marija, Ana)

4. Muško(Milan)

5. Brat(Jovan, Ana)

6. $\neg$Ista_osoba(Milan, Jovan)

7. $\neg$Ista_osoba(Milan, Ana)

Sva tvrđenja osim tvrđenja 1. i 2. se već nalaze u klauzalnoj formi pošto se radi o literalima. Tvrđenja 1. i 2. dovode se u klauzalnu formu uklanjanjem implikacije i primenom DeMorganovog zakona uz preimenovanje promenljivih druge formule radi jednoznačnosti.

1. $\neg$Brat(x,z) $\vee$ $\neg$Brat(y,z) $\vee$ Brat(x,y) $\vee$ Ista_osoba(x,y)

2. $\neg$Muško(u) $\vee$ $\neg$Majka(w,u) $\vee$ $\neg$Majka(w,v) $\vee$ Brat(u,v) $\vee$ Ista_osoba(u,v)

3'. Majka(Marija, Milan)

3''. Majka(Marija, Ana)

4. Muško(Milan)

5. Brat(Jovan, Ana)

6. $\neg$Ista_osoba(Milan, Jovan)

7. $\neg$Ista_osoba(Milan, Ana)

b) Prethodnim tvrdnjama dodajemo negaciju pretpostavke da je Milan Jovanov brat:

8. $\neg$Brat(Milan, Jovan)

i tražimo protivrečnost primenjujući pravilo rezolucije. S obzirom da ima dosta stavova, potrebno je usvojiti neku strategiju za izbor dva stava na koje primenjujemo rezoluciju u svakom koraku zaključivanja. U ovom slučaju primenićemo **strategiju *prvenstva jedinice* (engl. *unit preference*)** prema kojoj se prioritet pri izboru daje stavovima sa najmanjim brojem članova. U ovom slučaju između stavova 3' do 8 proizvoljno biramo stav 4 koji jedino može da se upari sa stavom 2:

2., 4. $\xrightarrow{u=Milan}$ 9. $\neg$Majka(w,Milan) $\vee$ $\neg$Majka(w,v) $\vee$ Brat(Milan,v) $\vee$ Ista_osoba(Milan,v)

U nastavku biramo stav 3'. Ovaj stav može da se upari sa stavovima 2 i 9. Od ova dva stava biramo 9 jer ima manje članova i primenjujemo rezoluciju:

3'., 9. $\xrightarrow{w=Marija}$ 10. $\neg$Majka(Marija,v) $\vee$ Brat(Milan,v) $\vee$ Ista_osoba(Milan,v)

Stav 3'' možemo upariti sa stavovima 2, 9 i 10 od kojih biramo stav 10 kao najkraći:

3''., 10. $\xrightarrow{v=Ana}$ 11. Brat(Milan,Ana) $\vee$ Ista_osoba(Milan,Ana)

Stav 7 uparujemo sa stavom 11 kao najkraćim od stavova 1, 2, 9, 10 i 11.

7., 11. $\longrightarrow$ 12. Brat(Milan,Ana)

Dobijeni stav 12 biramo sledeći. Ovaj stav može se upariti jedino sa stavom 1.

1., 12. $\xrightarrow{x=Milan,\ z=Ana}$ 13. $\neg$Brat(y,Ana) $\vee$ Brat(Milan,y) $\vee$ Ista_osoba(Milan,y)

Od neupotrebljenih stavova sa jednim predikatom ostali su još 5, 6 i 8. Stav 5 može se upariti sa stavovima 1 i 13 pri čemu biramo 13 jer ima manje članova.

5., 13. $\xrightarrow{y=Jovan}$ 14. Brat(Milan,Jovan) $\vee$ Ista_osoba(Milan, Jovan)

Stav 6. može se upariti sa stavovima 1, 2, 9, 10, 13 i 14. Od ovih stavova biramo stav 14 jer ima samo dva člana.

6., 14. $\longrightarrow$ 15. Brat(Milan,Jovan)

Novi stav 15 može se upariti sa stavovima 1 i 8 od kojih izbor pada na stav 8

15., 8. $\longrightarrow$ NIL

što znači da je pretpostavka tačna.

Zadatak 8: Rezolucija uz izbor stavova po širini

a) Sledeće WFF transformisati u konjunktivnu normalnu formu (CNF):

1. $\forall x \forall y \forall s\ [\ C(x,s) \land C(y,s) \Rightarrow O(x,y,P(x,y,s))\ ]$
2. $\forall x \forall y \forall s\ [\ O(x,y,s) \Rightarrow \neg\ C(y,s)\ ]$

b) Poznate su činjenice:

1. $P \Rightarrow R$
2. $Q \Rightarrow R$
3. $P \lor Q$

Pokazati da je R teorema, odnosno da R sledi iz prethodnih činjenica, koristeči rezoluciju uz **strategiju izbora stavova *po širini*.**

Rešenje

a) 1. $\neg C(x_1,s_1) \lor \neg C(y_1,s_1) \lor O(x_1,y_1,P(x_1,y_1,s_1))$

2. $\neg O(x_2,y_2,s_2) \lor \neg\ C(y_2,s_2)$

b) Činjenice u konjuktivnoj normalnoj formi:

1. $\neg P \lor R$
2. $\neg Q \lor R$
3. $P \lor Q$

Dodajemo negaciju teoreme:

4. $\neg R$

Rezolucijom tražimo protivrečnost. Za izbor stavova za primenu rezolucije primenićemo **strategiju izbora *po širini* (engl. *breadth-first*),** koja se sastoji u tome da se razmotre redom sve moguće kombinacije postojećih stavova pre nego što se pređe na novodobijene stavove.

Stav 1 može se redom kombinovati sa stavovima 3 i 4 a ne može sa stavom 2:

1., 3. $\longrightarrow$ 5. $Q \lor R$

1., 4. $\longrightarrow$ 6. $\neg P$

Stav 2 može se redom kombinovati sa stavovima 3 i 4:

2., 3. $\longrightarrow$ 7. $P \lor R$

2., 4. $\longrightarrow$ 8. $\neg Q$

Stavovi 3 i 4 ne mogu se kombinovati. Sada se razmatraju kombinacije stava 5 sa stavovima 1 do 4. Moguće kombinacije su:

2., 5. $\longrightarrow$ 9. $R \vee R$, što se elementranom transformacijom svodi na R

4., 5. $\longrightarrow$ 10. Q

Razmatranjem kombinacija stava 6 sa stavovima 1 do 5, zaključujemo da je jedina moguća kombinacija:

3., 6. $\longrightarrow$ 11. Q

Ovaj stav identičan je već dobijenom stavu 10. U sistem za zaključivanje može se ugraditi detekcija ovakvih situacija da bi se izbeglo nepotrebno razmatranje stava 11 u narednim kombinacijama; madjutim, treba voditi računa o tome da sprovodjenje detekcije takodje zahteva odredjeno vreme pri zaključivanju.

Sledi razmatranje kombinacija stava 7 sa stavovima 1 do 6. Zaključujemo da su moguće kombinacije:

1., 7. $\longrightarrow$ 12. P

4., 7. $\longrightarrow$ 13. P

6., 7. $\longrightarrow$ 14. R

Sledi razmatranje kombinacija stava 8 sa stavovima 1 do 7. Zaključujemo da su moguće kombinacije:

3., 8. $\longrightarrow$ 15. P

5., 8. $\longrightarrow$ 16. R

Sledi razmatranje kombinacija stava 9 sa stavovima 1 do 8. Zaključujemo da su moguće kombinacije:

4., 9. $\longrightarrow$ NIL

čime je polazna pretpostavka dokazana.

Diskusija

Ovaj primer jasno ilustruje problem kombinatorne eksplozije pri zaključivanju primenom rezolucije: broj mogućih kombinacija stavova za spajanje je eksponencijalna funkcija broja polaznih stavova i članova u tim stavovima. U ovom slučaju, bilo je potrebno 13 koraka da bi se za 4 polazna jednostavna stava našlo konačno rešenje primenom taktike spajanja stavova po širini. Ova taktika je 'neinteligenta' a njen je cilj da se ne preskoči nijedna od mogućih kombinacija stavova. Za isti primer, moguće je naći rešenje u samo 3 koraka:

2., 3. $\longrightarrow$ 5'. $P \vee R$

1., 5. $\longrightarrow$ 6'. R

4., 6. $\longrightarrow$ NIL.

Zadatak 9: Dokazivanje tautologija

Primenom rezolucije dokazati da je sleda formula tautologija:

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow [(R \vee P) \Rightarrow (R \vee Q)]$$

Analiza problema

U opštem slučaju dokazivanja neke predikatske formule rezolucijom, posedujemo skup aksioma P i tvrdjenje T. Rezoluciju primenjujemo na skup $P \cup \neg T$ to jest na skup koji se sastoji od polaznih aksioma i negacije tvrdjenja. Ukoliko primenom rezolucije dobijemo prazan stav, to jest protivrečnost u skupu $P \cup \neg T$ to znači da skup $P \cup \neg T$ ne može biti zadovoljen ni za jednu interpretaciju (semantiku koju dodeljujemo pojedinim konstantama, promenljivima, funkcijama i predikatima) aksioma i tvrdjenja. Iz ovoga sledi da je skup $P \cup T$ zadovoljen u svakoj interpretaciji, sledstveno tome T je teorema koja se dobija iz polaznih aksioma P nezavisno od interpretacije.

Zamislimo sada da imamo samo tvrdjenje T bez bilo kakvih aksioma. Ponovimo razmatranje iz prethodnog pasusa stavljajući da je P prazan skup: Ako rezolucijom pokažemo da $\neg T$ nije zadovoljeno, dokazali smo da je T zadovoljeno nezavisno od interpretacije i nezavisno od ikakvih polaznih pretpostavki. Formule koje su zadovoljene nezavisno od interpretacije, dakle važe u svakoj interpretaciji nazivaju se *valjanim* formulama u predikatskoj logici.

Propoziciona (iskazna) logika je podskup predikatske logike bez promenljivih. Formule iskazne logike koje su tačne za svaku interpretaciju (to jest, bez obzira koju istinitosnu vrednost imaju predikati koje se pojavljuju u formuli) nazivaju se *tautologije*. Tautologije u iskaznoj logici predstavljaju isto ono što valjane formule predstavljaju u predikatskoj logici.

Prema tome, da bismo dokazali da je neka formula tautologija, potrebno je primenom rezolucije naći protivrečnost u skupu stavova koji predstavljaju negaciju polazne formule.

Rešenje

Negiramo datu formulu:

$$\neg\{(P \Rightarrow Q) \Rightarrow [(R \vee P) \Rightarrow (R \vee Q)]\}$$

Prevodimo dobijenu formulu u konjuktivnu normalnu formu (KNF).

- Eliminacijom implikacije dobija se:

$$\neg\{\neg(\neg P \vee Q) \vee [\neg(R \vee P) \vee (R \vee Q)]\}$$

- Negaciju spuštamo na atomske formule. Prebacimo najpre krajnje levu negaciju 'pod zagradu':

$$(\neg P \vee Q) \wedge (R \vee P) \wedge \neg(R \vee Q)$$

- Transformisanjem poslednjeg člana formule dobijamo:

$$(\neg P \vee Q) \wedge (R \vee P) \wedge \neg R \wedge \neg Q$$

- Podelom na klauzule dobijamo traženu formu:

1. $\neg P \vee Q$
2. $R \vee P$

3. $\neg R$

4. $\neg Q$

Primenom rezolucije tražimo protivrečnost u navedenim stavovima (stavovi za spajanje će biti birani tako da se cilj postigne u što manje koraka):

1., 2. $\rightarrow$ 5. $Q \vee R$

3., 5. $\rightarrow$ 6. Q

4., 6. $\rightarrow$ NIL

Dobijanjem protivrečnosti dokazano je da je polazna formula tautologija.